

۱- گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases} Z = x + iy \\ \bar{Z} = x - iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z + \bar{Z} = 2x \\ Z - \bar{Z} = 2iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Z + \bar{Z}}{Z - \bar{Z}} = \frac{2x}{2iy} = -i \frac{x}{y} = A \\ \frac{Z - \bar{Z}}{Z + \bar{Z}} = \frac{2iy}{2x} = i \frac{y}{x} = B \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(B) \Rightarrow -\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow -x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0.$$

نتها مبدا مختصات در شرایط به دست آمده صدق می کند که چون ریشه مخرج هردو عبارت A و B محسوب می شود، غیرقابل قبول است.

۲- گزینه ۳ درست است.

چون قرار است X را برحسب u و v بیان کنیم، بهتر است عبارت $w = \frac{2}{z}$ را برحسب Z تنها کنیم:

$$z = \frac{2}{w} = \frac{2}{u + iv} \times \frac{u - iv}{u - iv} = \frac{2u - 2iv}{u^2 + v^2} = \frac{2u}{u^2 + v^2} - i \frac{2v}{u^2 + v^2} = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + v^2} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2} \end{cases}$$

۳- گزینه ۲ صحیح است.

باتوجه به اینکه $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ داریم:

$$\overline{f(1+i)} = \overline{2-3i} \Rightarrow f(\overline{1+i}) = 2+3i \Rightarrow f(1-i) = 2+3i \Rightarrow |f(1-i)| = |2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

۴- گزینه ۱ صحیح است.

باتوجه به اینکه $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ داریم:

$$\overline{5z^{10} - 11z^6 + 7z - 1 = 0} \Rightarrow \overline{5z^{10} - 11z^6 + 7z - 1} = 0 \Rightarrow 5\bar{z}^{10} - 11\bar{z}^6 + 7\bar{z} - 1 = 0.$$

پس اگر z ریشه چندجمله‌ای باشد، حتماً $\bar{z}$ نیز ریشه آن خواهد بود.

۵- گزینه ۲ صحیح است.

عبارت کسری را با ضرب و تقسیم در مزدوج مخرج، گویا و در عبارت دوم i را در پرانتز ضرب می‌کنیم.

$$z^2 = \frac{4}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} - (2i + i^2) = \frac{4-4i}{1-i^2} - (2i - 1) \Rightarrow z^2 = \frac{4-4i}{2} + 1 - 2i = 2 - 2i + 1 - 2i = 3 - 4i$$

$$\Rightarrow |z^2| = |z|^2 = \sqrt{9+16} = 5 \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$$